NTIT 國立臺中技術學院	所組：資訊科技與應用研究所 准考證號碼：
九十四學年度碩士班研究生考試入學試題	科目：線性代數

注意事項：

1.本科目考試時間共 90 分鐘。

2.答案卷書寫題號依序作答，不必抄題。

3.答案卷不可書寫任何可辨別個人姓名或特殊標記，違反者以零分計算。

4.請於試題紙上填寫准考證號，繳卷時「試題」、「答案卷」一併繳回。

以下問題每題 10 分

1. 假設在 $f: R^n \to R^m$ 之矩陣轉換(matrix transformation)定義爲 $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$，其中 A 是一個 $m \times n$ 的矩陣，若 $\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{v}$ 是在 R^n 空間的向量(vector)，而且 $f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ 、 $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ 以及 $\mathbf{0} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0]^T$，請證明 $f(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = \mathbf{0}$，式中 c 和 d 是任意實數。

2. 求通過點 $p_0(3,4,-2)$ 且平行向量(vector) $\mathbf{v} = [4 \quad -5 \quad 2]^T$ 的參數方程式(parametric equations)。

3. 考慮一向量空間(vector space) R^3 和以 R^3 爲基底(basis)的 $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$，其中 $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 、 $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 與 $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$。

   假設 $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$，試計算 $[\mathbf{v}]_S$ (coordinates of $\mathbf{v}$ with respect to S)？

4. 計算矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 的行(row)與列(column)的序(ranks)。

5. 求矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ 的 $Q\ R$ 分解爲因子($Q\ R$ factorization)，其中矩 A=$Q \times R$; Q 和 R 分別爲正交(orthogonal)與上三角(upper triangular)矩陣。

6. 假設 $L: R^2 \to R^2$ 且 L 爲線性運算子(linear operator)，若 $L([u_1 \quad u_2]) = [u_1^2 \quad 2u_2]$，請證明此 L 不是一個線性轉換(linear transformation)。

7. 請利用 Cramer's rule 求解下列線性系統(linear systems)：

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 2 \\ x_1 \qquad + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= -5. \end{aligned}$$

8. 求解矩陣 $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ 的特徵值(eigenvalues)與其相對應的特徵向量(eigenvectors)。

9. 假設 A 與 B 是 $n \times n$ 的矩陣且 $A\mathbf{x} = \lambda\ \mathbf{x}$ 和 $B\mathbf{x} = \mu\mathbf{x}$，其中 λ 與 μ 分別是矩陣 A 和 B 的特徵值(eigenvalues)。請分別證明 (1) $(A + B)\mathbf{x} = (\lambda + \mu)\mathbf{x}$ (2) $(A\,B)\mathbf{x} = (\lambda\,\mu)\mathbf{x}$。

10. 試求以下矩陣的反矩陣(inverse) A^{-1}。

   (1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ (2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$